$$\cos x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$$

$$\cos x=\frac{e^{i4x}+4e^{3ix}e^{ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}$$

$$\cos x=\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{16}+4\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{16}\right)+\frac{6}{16}$$

$$\cos^4 x=\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}$$

D'où :

$$\int_0^{\pi}\cos^4 x\,dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}\right)dx$$

$$=\left[\frac{\sin 4x}{32}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3}{8}x\right]_0^{\pi}=\frac{3}{8}\pi-0=\frac{3}{8}\pi$$

Par la suite :

$$V=\pi\left[\pi+4\times\frac{\pi}{2}+4\times\frac{3\pi}{8}\right]u.v$$

$$=\pi\left[\pi+2\pi+\frac{3\pi}{2}\right]u.v$$

$$=\pi\times\frac{9\pi}{2}=\frac{9}{2}\pi^2 u.v$$

Conclusion : $\boxed{V=\frac{9}{2}.\pi^2.u.v}$

Exercice 15

A/ $K(x)=\left(x^2+x+1\right)e^{-x}-1, x\in\mathbb{R}$

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}K(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x+1\right)e^{-x}-1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x+1\right)e^{-x}+1;\quad t=-x$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left(t^2-t+1\right)e^{t}+1$$

$$=\lim_{t\to-\infty}t^2e^{t}-te^{t}+e^{t}-1=-1$$

b) K est une fonction dérivable

sur $\mathbb{R}$ (produit de deux fonctions dérivable :

$x\mapsto x^2+x+1$ Polynôme

$x\mapsto e^{-x}$: (Dérivable sur $\mathbb{R}$)

et $K'(x)=(2x+1)e^{-x}+\left(x^2+x+1\right)(-e^{-x})$

$K'(x)=e^{-x}\left(2x+1-x^2-x-1\right)$

$K'(x)=\left(x-x^2\right)e^{-x}, x\in\mathbb{R}$

Comme $e^{-x}>0$: le signe de $K'(x)$ est

Celui de $x-x^2$:

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0			$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{e}-1$			↘	1

$K(0)=1-1=0$ et $K(1)=3e^{-1}-1=\frac{3}{e}-1$

2) on a : $\frac{3}{e}-1\approx 1,10>0$

*/ $K\left(]-\infty,0]\right)=[0,+\infty[$

$K\left(]0,1]\right)=\left]0,\frac{3}{e}-1\right]$

K Est une bijection sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$ et $]0,1]$

Comme $K(0)=0$ alors dans $]-\infty,1]$ l'unique solution de $K(x)=0$ est 0 .

*/ K est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et $K([1,+\infty[)=\left]-1,\frac{3}{e}-1\right]$

Alors l'équation $K(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[1,+\infty[$

On a : $K(2)=9e^{-2}-1\approx -0,03<0$ donc : $\alpha\in]1,2[$

En utilisant une calculatrice on trouve :

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn